Scomposizione di un polinomio in fattori: somma o differenza di due cubi

La scomposizione di un polinomio scritto come **somma di due cubi** (o **differenza di due cubi**) è possibile se il polinomio è composto da due monomi che hanno:

- i coefficienti cubi perfetti;
- le parti letterali con gli esponenti divisibili per 3.

Genericamente, la scomposizione della **somma di due cubi** può essere espressa nella forma:

$$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$$

In modo analogo, la scomposizione della **differenza di due cubi** può essere espressa genericamente come:

$$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

Osservando le scomposizioni, la somma di due cubi (o la differenza di due cubi) può essere espressa come il prodotto tra:

- la somma (o la differenza) tra le basi ($\boldsymbol{a}$ è la base di $\boldsymbol{a^3}$; $\boldsymbol{b}$ è la base di $\boldsymbol{b^3}$);
- il trinomio composta da:
  - il quadrato della prima base ($\boldsymbol{a^2}$ è il quadrato di $\boldsymbol{a}$);
  - il prodotto delle basi, cambiato di segno ($\boldsymbol{-\ ab}$ nel caso di somma di due cubi; $\boldsymbol{+\ ab}$ nel caso di differenza di due cubi);
  - il quadrato della seconda base ($\boldsymbol{b^2}$ è il quadrato di $\boldsymbol{b}$).

Esempio 1:

$8x^3 + 27y^3$

Osservando il polinomio si può notare che:

- i coefficienti sono cubi perfetti (8 è il cubo di 2; 27 è il cubo di 3);
- le parti letterali hanno gli esponenti che sono divisibili per 3 (entrambi gli esponenti di x e di y sono uguali a 3).

Questo porta ad affermare che il polinomio $8x^3 + 27y^3$ corrisponde alla somma di due cubi, quindi si può scomporre.

Applicando la regola generale sopra riportata, la scomposizione sarà:

$8x^3 + 27y^3 = \mathbf{(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)}$

Per verificare che la scomposizione è corretta, è sufficiente eseguire il prodotto:

$\mathbf{(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)} = 8x^3 - 12x^2y + 18xy^2 + 12x^2y - 18xy^2 + 27y^3 = \mathbf{8x^3 + 27y^3}$

I termini evidenziati in rosso e in blu si annullano e si ottiene il polinomio iniziale: questo porta ad affermare che la scomposizione è corretta.

Esempio 2:

$a^9 - 64b^6$

Osservando il polinomio si può notare che:

- i coefficienti sono cubi perfetti (1 è il cubo di 1; 64 è il cubo di 4);
- le parti letterali hanno gli esponenti che sono divisibili per 3 (a ha esponente uguale a 9; b ha esponente uguale a 6).

Questo porta ad affermare che il polinomio $a^9 - 64b^6$ corrisponde alla differenza di due cubi, quindi si può scomporre.

Applicando la regola generale sopra riportata, la scomposizione sarà:

$a^9 - 64b^6 = \mathbf{(a^3 - 4b^2)(a^6 + 4a^3b^2 + 16b^4)}$

Per verificare che la scomposizione è corretta, è sufficiente eseguire il prodotto:

$\mathbf{(a^3 - 4b^2)(a^6 + 4a^3b^2 + 16b^4)} = a^9 + 4a^6b^2 + 16a^3b^4 - 4a^6b^2 - 16a^3b^4 - 64b^6 = \mathbf{a^9 - 64b^6}$

I termini evidenziati in rosso e in blu si annullano e si ottiene il polinomio iniziale: questo porta ad affermare che la scomposizione è corretta.